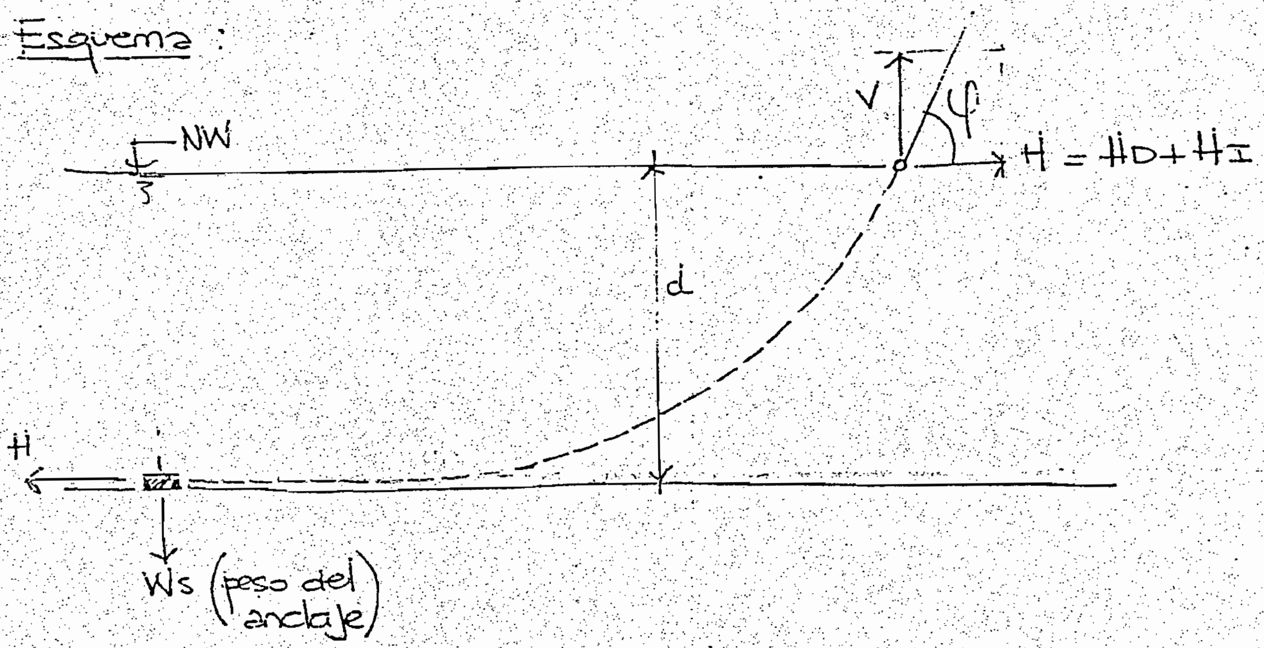
# DETERMINACION DE FUERZA HORIZONTAL (H) EN CADENAS DE AMARRE



La fuerza horizontal actuante (H) que actúa sobre la cadena del sistema de amarre se compone de:

- ✓ fuerzas de arrastre ($H_D$)
- ✓ fuerzas de inercia ($H_I$)

Esquema:




Fuerzas de arrastre ($H_D$)

La fuerza de arrastre ($H_D$) es el resultado de la acción de las velocidades orbitales sobre el cuerpo amarrado.

$$H_D = \frac{1}{2} C_D \cdot \rho \cdot A \cdot (u)^2 \quad (1)$$

donde $C_D$: coeficiente de arrastre

$\rho$: masa específica del agua

$A$: sección transversal del área en el plano normal a la fuerza

$$u = u_m + u_x \quad (2)$$

$u_m$: velocidad de corriente (lectura de cartas náuticas)

$u_x$: componente de la velocidad orbital de las partículas con la misma dirección que la fuerza.

Siendo el potencial de velocidades:

$$\phi = \frac{H}{2} \cdot \frac{\sigma}{k} \cdot \frac{\cosh[k.(d+z)]}{\operatorname{senh}(k.d)} \cdot \operatorname{sen}(kx - \sigma t)$$

$$\phi = \underbrace{\frac{H}{2} \cdot \frac{\sigma}{k} \cdot \frac{\cosh[k.(d+z)]}{\operatorname{senh}(k.d)}}_{(A)\ \text{constante según } x} \cdot \underbrace{(\operatorname{sen} kx . \cos \sigma t - \cos kx . \operatorname{sen} \sigma t)}_{(B)\ \text{variable según } x}$$

$$u_x = \frac{\partial \phi}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}(A . B) = A \frac{\partial B}{\partial x} + \underbrace{\frac{\partial A}{\partial x}}_{0} \cdot B = A \cdot \frac{\partial B}{\partial x}$$

$$\frac{\partial B}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}(\operatorname{sen} kx . \cos \sigma t - \cos kx . \operatorname{sen} \sigma t)$$

$$\frac{\partial B}{\partial x} = \left[\frac{\partial}{\partial x} \operatorname{sen} kx . \cos \sigma t + \operatorname{sen} kx . \underbrace{\frac{\partial}{\partial x} \cos \sigma t}_{0}\right] - \left[\frac{\partial}{\partial x} \cos kx . \operatorname{sen} \sigma t + \cos kx . \underbrace{\frac{\partial}{\partial x} \operatorname{sen} \sigma t}_{0}\right]$$

$$\frac{\partial B}{\partial x} = k . \cos kx \cos \sigma t + k \operatorname{sen} kx \operatorname{sen} \sigma t$$

$$\frac{\partial B}{\partial x} = k (\cos kx . \cos \sigma t + \operatorname{sen} kx . \operatorname{sen} \sigma t)$$

$$\frac{\partial B}{\partial x} = k . \cos (kx - \sigma t)$$

$$\Rightarrow u_x = A . \frac{\partial B}{\partial x} = \frac{H}{2} \cdot \frac{\sigma}{k} \cdot \frac{\cosh[k(d+z)]}{\operatorname{senh}(k.d)} . k \cos(kx - \sigma t)$$

$$u_x = \frac{H}{2} . \sigma . \frac{\cosh[k(d+z)]}{\operatorname{senh}(k.d)} . \cos(kx - \sigma t) \quad (5)$$

siendo $\sigma = \frac{2\pi}{T}$ ; $k = \frac{2\pi}{L}$

$\theta = kx - \sigma t$ : ángulo de fase

T: periodo de la onda

L: longitud de onda

Fuerzas de Inercia ($H_I$)

La fuerza de inercia ($H_I$) es el resultado de la acción de las aceleraciones orbitales sobre el cuerpo amarrado.-

$$H_I = \cancel{\frac{\pi}{4}} \cdot C_A \cdot \rho \cdot \cancel{A} \cdot a_x \quad (4)$$

Vol

donde $C_A$: coeficiente de inercia

$\rho$: masa específica del agua

$A$: sección transversal del área en el plano normal a la fuerza

$a_x = \frac{\partial}{\partial t} u_x$ (5) aceleración orbital (componente con la misma dirección que la fuerza

$$a_x = \frac{\partial}{\partial t}\left[\underbrace{\frac{H}{2} \cdot \sigma \cdot \frac{\cosh[k(d+z)]}{\operatorname{senh}(k \cdot d)}}_{(A)} \cdot \underbrace{\cos(kx - \sigma t)}_{(B)}\right] = \frac{\partial}{\partial t}$$

constante según $t$ — variable según $t$

$$a_x = \frac{\partial u_x}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t}(A \cdot B) = A \cdot \frac{\partial B}{\partial t} + \underbrace{\frac{\partial A}{\partial t}}_{0} \cdot B = A \cdot \frac{\partial B}{\partial t}$$

$$\frac{\partial B}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t}\left[\cos(kx - \sigma t)\right]$$

$$\frac{\partial B}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t}\left(\cos kx \cdot \cos \sigma t + \operatorname{sen} kx \cdot \operatorname{sen} \sigma t\right)$$

$$\frac{\partial B}{\partial t} = \left[\underbrace{\frac{\partial}{\partial t} \cos kx}_{0} \cdot \cos \sigma t + \cos kx \cdot \frac{\partial}{\partial t} \cos \sigma t\right] + \left[\underbrace{\frac{\partial}{\partial t} \operatorname{sen} kx}_{0} \cdot \operatorname{sen} \sigma t + \operatorname{sen} kx \cdot \frac{\partial}{\partial t} \operatorname{sen} \sigma t\right]$$

$$\frac{\partial B}{\partial t} = \cos kx \cdot \sigma(-\operatorname{sen} \sigma t) + \operatorname{sen} kx \cdot \sigma \cos \sigma t$$

$$\frac{\partial B}{\partial t} = \sigma\left(\operatorname{sen} kx \cdot \cos \sigma t - \cos kx \operatorname{sen} \sigma t\right)$$

$$\frac{\partial B}{\partial t} = \sigma \cdot \operatorname{sen}(kx - \sigma t)$$

$$\Rightarrow a_x = A \cdot \frac{\partial B}{\partial t} = \frac{H}{2} \cdot \sigma \cdot \frac{\cosh[k(d+z)]}{\operatorname{senh}(kd)} \cdot \sigma \cdot \operatorname{sen}(kx - \sigma t)$$

$$a_x = \frac{H}{2} \cdot \sigma^2 \cdot \frac{\cosh[k(d+z)]}{\operatorname{senh}(k \cdot d)} \cdot \operatorname{sen}(kx - \sigma t) \quad (6)$$

Caso para aguas profundas ($d > 0{,}50\,L$)

Cuando se analiza el caso de aguas profundas, se tiene que $d \gg z$ (sobreelevación por oleaje); con lo cual los términos hiperbólicos de las ecuaciones (3) y (6) se convierten en:

$$\frac{\cosh[k(d+z)]}{\operatorname{senh}(k \cdot d)} \cong \frac{\cosh(k \cdot d)}{\operatorname{senh}(k \cdot d)} = \left[\operatorname{tgh}(k \cdot d)\right]^{-1} = \left[\operatorname{tgh}\left(\frac{2\pi}{L} \cdot d\right)\right]^{-1}$$

y por ser aguas profundas $d \geq 0{,}50\,L$:

$$\left[\operatorname{tgh}\left(\frac{2\pi}{L} \cdot 0{,}50\,L\right)\right]^{-1} = \left[\operatorname{tgh}(\pi)\right]^{-1} = 1$$

consecuentemente, los términos hiperbólicos presentes en (3) y en (6) se anulan y resulta:

$$u_x = \frac{H}{2} \cdot \sigma \cdot \cos\theta \quad (7)$$

$$a_x = \frac{H}{2} \cdot \sigma^2 \cdot \operatorname{sen}\theta \quad (8)$$

$\theta = kx - \sigma t$ : ángulo de fase.

Finalmente, si se quiere evaluar la fuerza de arrastre ($H_D$) y de Inercia ($H_I$) aplicando las expresiones (7) y (8) se debe integrar desde el ángulo de fase $\theta = 0$ ($u_x = \text{máx}$; $a_x = 0$) hasta el ángulo de fase $\theta = \frac{\pi}{2}$ ($u_x = 0$; $a_x = \text{máx}$)

Anexo 1 de 2

## Caso para aguas intermedias ($d = \frac{1}{2} L$ a $\frac{1}{20} L$)

Cuando se analiza el caso de aguas intermedias, se tiene que la profundidad d también es mayor que la sobreelevación por oleaje (z) con lo cual los términos hiperbólicos de las ecuaciones (3) y (6) se convierten en:

$$\frac{\cosh[k(d+z)]}{\operatorname{senh}(k.d)} \cong \frac{\cosh(k.d)}{\operatorname{senh}(k.d)} = \frac{1}{\operatorname{tgh}(k.d)}$$

y por ser aguas intermedias se tiene que

$$\operatorname{tgh}(k.d) \cong k.d \Rightarrow \frac{\cosh[k(d+z)]}{\operatorname{senh}(k.d)} \cong \frac{1}{k.d}$$

consecuentemente, las ecuaciones (3) y (6) resultan

$$u_x = \frac{H}{2} \cdot \sigma \cdot \frac{1}{k.d} \cdot \cos\theta \qquad (11)$$

$$a_x = \frac{H}{2} \cdot \sigma^2 \cdot \frac{1}{k.d} \cdot \operatorname{sen}\theta \qquad (12)$$

Finalmente, si se quiere evaluar fuerzas de arrastre ($H_D$) y de inercia ($H_I$) aplicando expresiones (11) y (12) se integran con respecto al ángulo de fase (desde $\theta = 0$ hasta $\theta = \frac{\pi}{2}$) al igual que lo hecho para el caso de aguas profundas:

<u>Determinación de la velocidad de la partícula</u> ($V_w \equiv U_x$)

$$V_w = \int_0^{\pi/2} u_x \, d\theta = \frac{H}{2} \cdot \sigma \cdot \frac{1}{kd} \underbrace{\int_0^{\pi/2} \cos\theta \, . \, d\theta}_{=1}$$

$$V_w = \frac{H}{2} \cdot \sigma \cdot \frac{1}{kd} \qquad (13)$$

Anexo 2 de 2

## Determinación de la aceleración de la partícula [$a \equiv a_x$]

$$a = \int_0^{\pi/2} a_x \cdot d\theta = \frac{H}{2} \cdot \sigma^2 \cdot \frac{1}{kd} \underbrace{\int_0^{\pi/2} \operatorname{sen}\theta \cdot d\theta}_{=1}$$

$$a = \frac{H}{2} \cdot \sigma^2 \cdot \frac{1}{kd} \qquad (14)$$

Finalmente, si se particularizan (13) y (14) para el caso de aguas intermedias caracterizado por $d = \frac{1}{20} L$; se tiene:

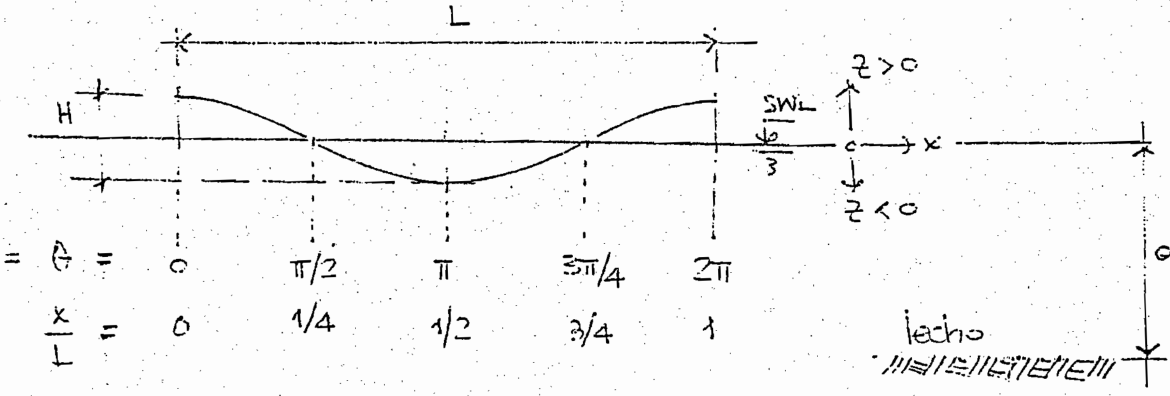
$$V_w = \frac{H}{2} \cdot \sigma \cdot \frac{1}{kd} = \frac{H}{2} \; \frac{2\pi}{T} \; \frac{1}{\frac{2\pi}{L} \cdot \frac{L}{20}}$$

$$\Rightarrow V_w = 10 \cdot \frac{H}{T} \qquad (15)$$

$$a = \frac{H}{2} \cdot \sigma^2 \cdot \frac{1}{kd} = \frac{H}{2} \; \frac{4\pi^2}{T^2} \cdot \frac{1}{\frac{2\pi}{L} \cdot \frac{L}{20}}$$

$$\Rightarrow a = 20\pi \frac{H}{T^2} \cong 63 \frac{H}{T^2} \qquad (16)$$

## Esquema de velocidades y aceleraciones

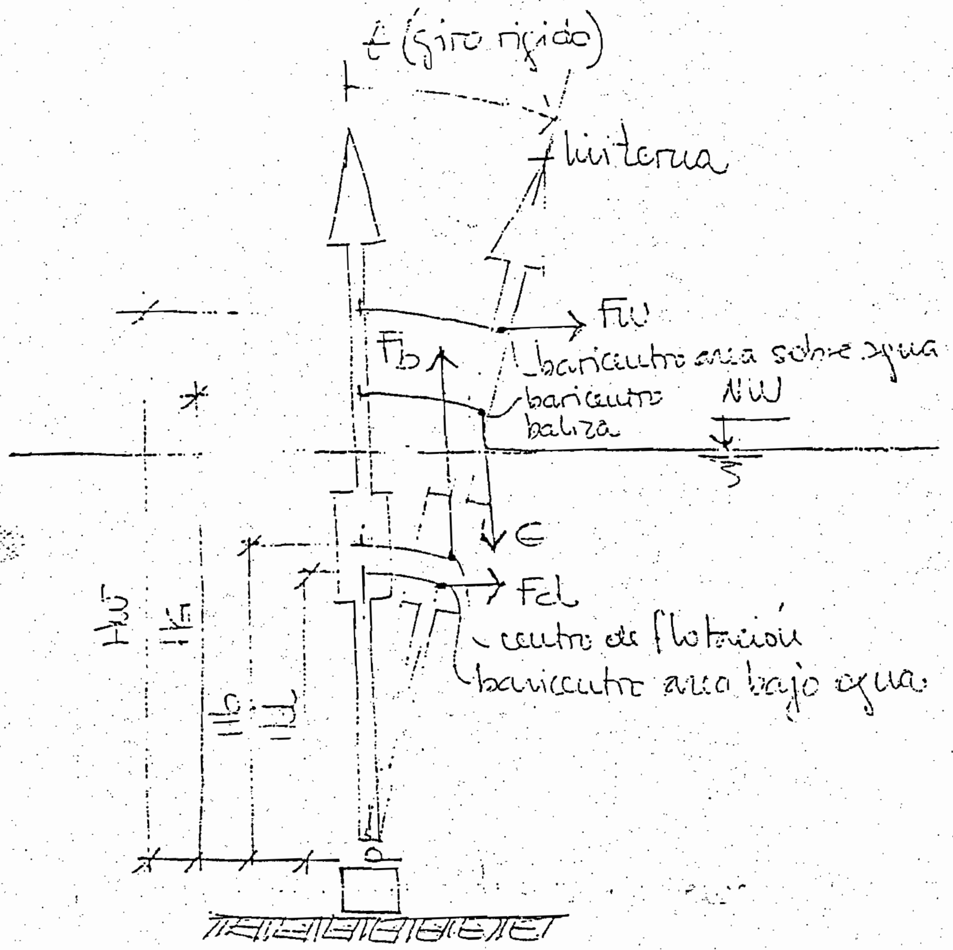



| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $kx - \sigma t = \theta =$ | | 0 | $\pi/2$ | $\pi$ | $3\pi/4$ | $2\pi$ |
| $\frac{x}{L} =$ | | 0 | 1/4 | 1/2 | 3/4 | 1 |
| $u_x =$ | | max + | 0 | max − | 0 | max + |
| $u_z =$ | | 0 | max + | 0 | max − | 0 |
| $\partial u_x / \partial t =$ | $a_x =$ | 0 | max + | 0 | max − | 0 |
| $\partial u_z / \partial t =$ | $a_z =$ | max − | 0 | max + | 0 | max − |

## VERIFICACION ESTABILIDAD SPAR BUOY

ANEXO II

### Consideraciones teoricas - Cálculo SPAR




$F_w = 1/2\ \rho_{aire}\ (V_w)^2\ C_w$ . Sup proyectada arriba agua | Fuerza debido al viento

$F_d = 1/2\ \rho_{agua}\ (V_d)^2\ C_d$ . Sup proyectada abajo agua | Fuerza debida a la corriente

G: Peso de baliza total (en seco)

Fb: empuje hidrostatico

**Equilibrio de momentos**

$$F_w \cdot H_w \cos\phi + F_D\ H_d \cos\phi = F_b\ H_b \sin\phi - G\ H_G \sin\phi$$

$$(F_w\ H_w + F_D H_D)\cos\phi = (F_b H_b - G H_G)\sin\phi$$

$$\boxed{\operatorname{tg}\phi = \frac{\sin\phi}{\cos\phi} = \frac{F_w \cdot H_w + F_d\ H_d}{F_b \cdot H_b - G\ H_G}}$$ ⇒ despejar φ

necesariamente a calcular en: → minimo nivel de agua
→ nivel de velocidad de corriente (Vd) maxima
[illegible]

## Fuerza horizontal debido al oleaje

$$dF_h = \Big[\underbrace{C_m \cdot \rho \, \frac{\pi D^2}{4} \, \frac{\partial u}{\partial t}}_{F_I} + \underbrace{\frac{1}{2}\, C_D \cdot \rho \cdot D \, \|u\| \cdot u}_{F_D}\Big] \, dS$$

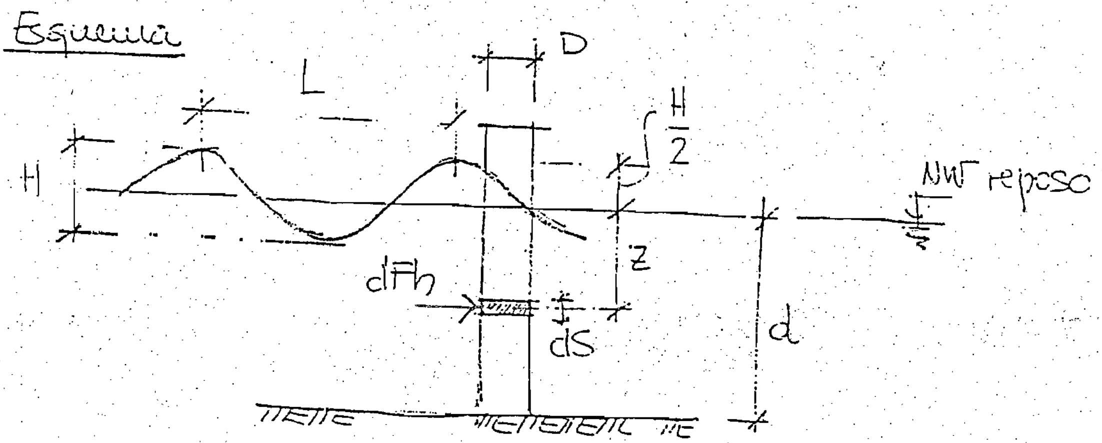
$C_m = 2$ (coef masa)

$C_D = 1{,}20$ a $1{,}60$ (coef arrastre)

$\rho \cong 1026 \ kg/m^3$ (densidad agua de mar)

D = diametro del elemento

Esquema




u: velocidad horizontal de la partícula que se mueve en el oleaje

$$u = \frac{\pi H}{T} \, \frac{\cosh\left[\frac{2\pi}{L}(z+d)\right]}{\operatorname{senh}\left[\frac{2\pi}{L} d\right]} \times \cos\Big[\underbrace{2\pi\left(\frac{x}{L} - \frac{t}{T}\right)}_{\theta}\Big]$$

$\frac{\partial u}{\partial t}$: aceleración horizontal de la partícula que se mueve en el oleaje

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{2\pi^2 H}{T^2} \, \frac{\cosh\left[\frac{2\pi}{L}(z+d)\right]}{\operatorname{senh}\left[\frac{2\pi}{L} \cdot d\right]} \times \operatorname{sen}\Big[\underbrace{2\pi\left(\frac{x}{L} - \frac{t}{T}\right)}_{\theta}\Big]$$

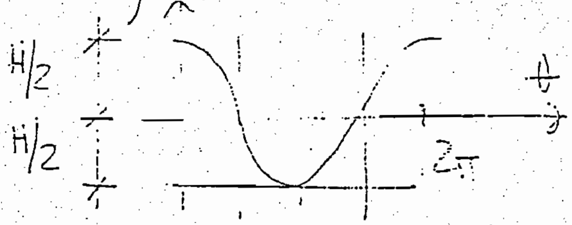
z: profundidad del "anillo" de espesor dS ; (velocidad u y aceleración $\partial u/\partial t$ varían con la profundidad z) ; $+\frac{H}{2} \geq z \geq -d$

L: longitud
H: altura } del oleaje
T: periodo

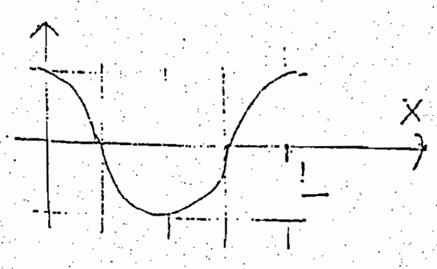
d: profundidad total del agua en reposo

## Ángulo de fase de la ola ($\theta$)

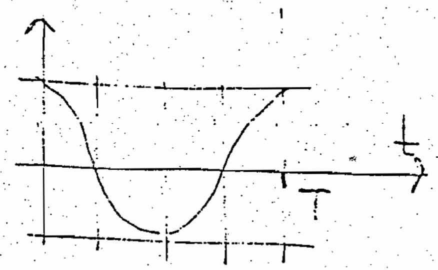
$\eta$ (elevación del NW)




$$\eta = \frac{H}{2}\cos\theta$$




$$\eta = \frac{H}{2}\cos\left(2\pi\left(\frac{x}{L}\right)\right)$$



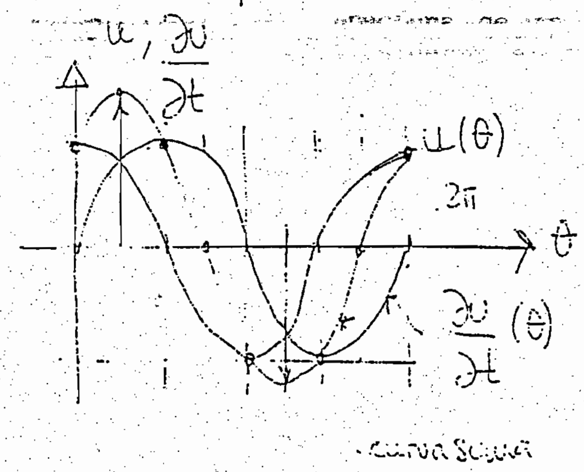

$$\eta = \frac{H}{2}\cos\left(2\pi\left(\frac{t}{T}\right)\right)$$

$$\theta = 2\pi\left(\frac{x}{L} - \frac{t}{T}\right)$$

Para una profundidad $z$ cualquiera

$u = k \cdot \cos\theta$

$\frac{\partial u}{\partial t} = k \cdot \sin\theta$




los máximos de dPh ocurren cuando la suma $u + \frac{\partial u}{\partial t}$ es máxima

esto ocurre en $\theta = \frac{\pi}{4}$ (45°) ; $\theta = \frac{5}{4}\pi$ (225°)

$t = \frac{T}{8}$

5/5

Determinación de la velocidad de la partícula $(V_W)$

$[V_W \equiv u_x]$

$$V_W = \int_0^{\pi/2} u_x \cdot d\theta = \int_0^{\pi/2} \frac{H}{2} \cdot \sigma \cdot \cos\theta \cdot d\theta$$

$$V_W = \frac{H}{2} \cdot \sigma \int_0^{\pi/2} \cos\theta \cdot d\theta$$

$$V_W = \frac{H}{2} \cdot \sigma \left[ \operatorname{sen}\theta \Big|_0^{\pi/2} \right]$$

$$V_W = \frac{H}{2} \cdot \sigma \cdot \left(\operatorname{sen}\frac{\pi}{2} - \operatorname{sen} 0\right)$$

$$V_W = \frac{H}{2} \cdot \sigma \cdot (1 - 0)$$

$$V_W = \frac{H}{2} \cdot \frac{2\pi}{T} \Rightarrow \boxed{V_W = \pi \frac{H}{T}}$$

(9) → coincidente con apunte en inglés

Determinación de la aceleración de la partícula (a)

$[a \equiv a_x]$

$$a = \int_0^{\pi/2} a_x \cdot d\theta = \int_0^{\pi/2} \frac{H}{2} \cdot \sigma^2 \operatorname{sen}\theta \cdot d\theta$$

$$a = \frac{H}{2} \sigma^2 \int_0^{\pi/2} \operatorname{sen}\theta \cdot d\theta$$

$$a = \frac{H}{2} \sigma^2 \left[ -\cos\theta \Big|_0^{\pi/2} \right]$$

$$a = \frac{H}{2} \sigma^2 \cdot \left[-\cos\frac{\pi}{2} - (-\cos 0)\right]$$

$$a = \frac{H}{2} \cdot \sigma^2 \cdot [0 - (-1)]$$

$$a = \frac{H}{2} \left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 \Rightarrow \boxed{a = 2\left(\frac{\pi}{T}\right)^2 \cdot H}$$

(10) → coincidente con apunte en inglés.

(9) puede usarse en reemplazo de (3).

(10) puede usarse en reemplazo de (6)

ambos casos siempre que se trate de aguas profundas -